Lección n°4: Tipos de funtores.

EPN, 2021

7. Funtores fieles y plenos

Recordemos que en el contexto de funciones entre conjuntos, son de vital importancia los conceptos de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad; en especial para poder hablar de inclusiones, inyecciones y demás tipos de aplicaciones. Tenemos análogos a los mismos en el contexto de funtores entre categorías.

Definición. *Diremos que un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es **fiel** si es que, restringuido a cada hom-set, es una función inyectiva. Esto es, que para cada $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, se tiene que la función*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A'))$$
$$f \longmapsto F(f)$$

es inyectiva.

Definición. *Diremos que un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es **pleno** (también dicho **lleno**) si es que, restringuido a cada hom-set, es una función sobreyectiva. Es decir, para cada $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, se tiene que la función*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A'))$$
$$f \longmapsto F(f)$$

es sobreyectiva.

Ser fiel o ser pleno son "propiedades locales" en el sentido de que estamos hablando de cada hom-set y no de todo la clase de flechas u objetos. En particular, el hecho de que un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ sea fiel no implica que para cada $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A})$ tales que $f \neq g$, se compruebe que $F(f) \neq F(g)$.

Por ejemplo, consideremos P un poset cualquiera y $\{1\}$ el poset de un elemento. Si vemos a ambos como categorías entonces la unica función posible $i : P \to \{1\}$ es un funtor.

Es claro que es fiel, e incluso es pleno, pero también podemos ver que cada una de las distintas flechas $f : x \to y$ (que nos dicen que $x \leqslant y$) son asignadas todas a la identidad del objeto 1.

Por tanto, es importante que también distingamos más tipos de funtores

Definición.

- *Un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es **inyectivo en objetos** si es que la función*

$$\mathrm{ob}(\mathscr{A}) \to \mathrm{ob}(\mathscr{B})$$
$$A \to F(A)$$

  *es inyectiva. De manera análoga, tenemos las definiciones de **sobreyectivo en objetos**, **inyectivo en flechas**, **sobreyectivo en flechas**.*

- *Un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es* ***esencialmente sobreyectivo en objetos*** *si es que para todo $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$, existe un $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ tal que $F(A) \cong B$.*
- *Un funtor fiel e inyectivo en objetos es conocido como una* ***incrustación*** *(embedding).*

Ejemplo 7.1. *Sea U : **Ring** $\to$ **Ab** que asigna a cada anillo $(R, +, \cdot)$ su grupo aditivo $(R, +)$ el cual por definición tiene que ser abeliano y a cada homomorfismo de anillo $(R, +, \cdot) \to (R', +, \cdot)$ le asigna el homomorfismo de grupo $(R, +) \to (R', +)$; entonces lo siguiente es cierto:*

- *U es fiel. Esto es sencillo pues si R, R' son dos anillos y sabemos que dos homomorfismos de anillos $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Ring}}(R, R')$ son distintos, entonces en particular serán distintos como homomorfismos solo de sus grupos aditivos.*
- *U no es pleno. Para ello, probemos que no existe ningún homomorfismo de anillo $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$, supongamos que existe uno, digamos ϕ, sabemos entonces que $\phi(1) = 1$, pero así*

  $$0 = \phi(0) = \phi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\phi(1) + \cdots + \phi(1)}_{n \text{ veces}} = 1 * n = n,$$

  lo cual es imposible para todo $n \geqslant 1$. Por otro lado, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Grp}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$ es no vacío pues existe un homomorfismo: el trivial $\psi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$. Esto es posible ya que al ya no ser homomorfismo de anillo la condición $\psi(1) = 1$ no es obligatoria.
- *U no es esencialmente sobreyectivo en objetos. Notemos que esto es equivalente a demostrar que, no todo grupo abeliano G tiene un anillo A tal que, como grupos, sean isomorfos; en palabras más cortas, que no todo grupo abeliano puede ser armado de una estructura de anillo.*

  Consideremos entonces el grupo de todas las raíces complejas de la unidad, esto es:

  $$G = \{x \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n = 1\}.$$

  El producto de dos elementos es la multiplicación en $\mathbb{C}$. Probemos que G no puede armarse de una operación de anillo. Es claro, por la definición, que G es abeliano y que todo elemento de G tiene orden finito, pero también se tiene que no hay una cota superior para el orden de todos los elementos de G, pues para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $e^{\frac{2\pi i}{k+1}}$ tiene orden $k + 1$.

  Este hecho nos permite concluir. En efecto, sea $(G, \cdot, *)$ una estructura de anillo impuesta en G, donde $\cdot$ es nuestra multiplicación en $\mathbb{C}$ y $*$ es una nueva operación que tendrá una unidad, será asociativa y distributiva con respecto a $\cdot$. Llamemos a esta unidad como $e \in G$. Pero entonces e tiene orden finito, llamémoslo $k \in \mathbb{N}$, luego para todo $a \in G$ se tiene que

  $$\underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{k \text{ veces}} = \underbrace{(a * e) \cdot (a * e) \cdot \ \ldots \ \cdot (a * e)}_{k \text{ veces}} = a * (\underbrace{e \cdot e \cdot \ \ldots \cdot \ e}_{k \text{veces}}) = a * (e^k) = a * 1 = 1,$$

  donde la segunda igualdad se debe a la propiedad distributiva y la última se debe a que $a * 1 = a * (1 \cdot 1) = (a * 1) \cdot (a * 1)$, otra vez, por la propiedad distributiva. Así, todo $a \in G$ tiene a lo más orden k, lo cual es una contradicción.

Estos conceptos nos ayudan para definir distintos tipos de subcategorías, es decir categorías más pequeñas contenidas en otra categoría construidas con parte de sus objetos y flechas.

Definición. *Una categoria $\mathscr{A}$ se dice que es* ***subcategoría*** *de otra categoría $\mathscr{B}$ si es que se cumplen las siguientes condiciones*

- $\text{ob}(\mathscr{A}) \subseteq \text{ob}(\mathscr{B})$.
- *Para todo* $A, A' \in \text{ob}(\mathscr{A})$ *se tiene que* $\text{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A') \subseteq \text{Hom}_{\mathscr{B}}(A, A')$.
- *Para todo* $A \in \text{ob}(\mathscr{A})$ *se tiene que la flecha identidad* 1_A *en* $\mathscr{A}$ *es también la flecha identidad de* A *en* $\mathscr{B}$.
- *La operación composición de* $\mathscr{A}$ *coincide con la restricción de la ley de composición de* $\mathscr{B}$ *en* $\text{ob}(\mathscr{A})$.

Adicionalmente, si es que para todo $A, A' \in \text{ob}(\mathscr{A})$ *se cumple que* $\text{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A') = \text{Hom}_{\mathscr{B}}(A, A')$ *entonces se dirá que es una* ***subcategoría plena*** *o* ***llena****.*

Observación 20.

- *Notemos que si* $\mathscr{A}$ *es subcategoría de* $\mathscr{B}$*, entonces existe asociado un* ***funtor inclusión*** $I : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$*, definido por* $I(A) = A$ *y* $I(f) = f$ *para todo* $A \in \text{ob}(\mathscr{A})$, $f \in \text{Hom}(\mathscr{A})$. *Este funtor es claramente fiel e inyectivo en objetos, por tanto es una incrustación.*
- *Si tenemos que* $\mathscr{A}$ *es una subcategoría plena de* $\mathscr{B}$ *entonces es suficiente con determinar qué objetos de* $\mathscr{B}$ *están en* $\mathscr{A}$*, para describirla. Por ejemplo,* ***Ab*** *es un categoría plena de* ***Grp*** *que se puede ver construida simplemente tomando los grupos abelianos de* ***Grp****. De igual forma* ***CRing*** *es una categoría plena de* ***Ring*** *y la subcategoría plena* ***Haus*** *de* ***Top*** *se forma tomando todos los espacios topológicos de Hausdorff.*
- *En contraste, sea la categoría* ***Lat*** *que tiene como objetos a los retículos (en inglés, "lattices"), es decir, conjuntos parcialmente ordenados para los cuales cada par de elementos tiene ínfimo y supremo; y que tiene como flechas a las funciones monótonas que preservan los supremos e ínfimos. Esto es, tales que* $f(\sup\{x, y\}) = \sup\{f(x), f(y)\}$*, similarmente para el ínfimo. Entonces* ***Lat*** *es una subcategoría de* ***Pos*** *que no es plena.*
- *La categoría vacía (sin objetos ni flechas) y la propia* $\mathscr{A}$ *son subcategorías plenas de* $\mathscr{A}$.

La razón del nombre subcategoría plena, se da continuación.

Lema 7.1. *Sea* $\mathscr{A}$ *una subcategoría de* $\mathscr{B}$ *entonces* $\mathscr{A}$ *es plena si y solo si el funtor inclusión* $I : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *es pleno.*

De manera similar a como en buen parte de las matemáticas se identifican objetos con sus imágenes a través de un isomorfismo, se tiene el siguiente análogo para categorías.

Lema 7.2. *Un funtor* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *es una incrustación plena si y solo si existe una subcategoría plena* $\mathscr{C}$ *de* $\mathscr{B}$ *tal que para el funtor inclusión* $I : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ *existe un isomorfismo de categorías* $G : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ *tal que* $F = I \circ G$.

Demostración. Se deja al lector. *Pista:* Definir $\mathscr{C} = \text{Im}(F)$ usando el ejercicio resuelto 3 al final de esta lección, y el anterior lema. $\square$

Por el anterior lema, se tiene que una subcategoría plena se puede definir solamente con una incrustación plena.

Para terminar esta sección también podemos notar que los funtores pueden aprovechar una estructura ya impuesta en un categoría. Por ejemplo:

Definición. *Dadas dos categorías preaditivas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, entonces un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ se dice* ***aditivo*** *si es que para cada $f, f' \in \mathrm{Hom}(A, B)$ con $A, B \in \mathscr{A}$ se cumple que*

$$F(f + f') = F(f) + F(f').$$

Ejemplo 7.2. *Si es que tenemos dos anillos A y B vistos como categorás preaditivas, entonces un funtor $F : A \to B$ aditivo no es otra cosa que un homomorfismo de anillo.*

8. Funtores olvidadizos, categorías concretas y objetos libres

Hemos, de forma consciente, obviado uno de los tipos más fáciles de funtores: Los funtores olvidadizos. En general un funtor olvidadizo es aquel que olvida su estructura, por ejemplo en 7.1, el funtor ha "olvidado" la estructura de anillo y solo ha retenido la estructura de grupo.

Podríamos así también haber definido un funtor **Ring** $\to$ **Set** que tomara en cuenta solo el conjunto de elementos del anillo y a los homomorfismos de anillos verlos como funciones de conjuntos. Nos enfocaremos específicamente en este tipo de funtores.

Definición. *Un* ***funtor olvidadizo*** *es un funtor fiel $\sigma : \mathscr{A} \to$* ***Set****.*

Si es que en $\mathscr{A}$ se puede definir un funtor olvidadizo $\sigma : \mathscr{A} \to$ ***Set****, entonces a $\mathscr{A}$ se la conocerá como una* ***categoría concreta****.*

Observación 21. *Que una categoría sea concreta es justamente lo que necesitábamos para justificar el nombre de todas las categorías en el ejemplo 3.1, pues que $\mathscr{A}$ sea concreta es equivalente a la existencia de una función σ tal que a cada objeto A se le asigna un conjunto $\sigma(A)$ llamado el conjunto subyacente de A de tal manera que:*

(1) Toda flecha $A \to B$ de $\mathscr{A}$ es asignada a una función de conjuntos $\sigma(A) \to \sigma(B)$ de tal manera que si dos flechas $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ son distintas entonces las funciones de conjuntos tambien lo serán

(2) La flecha identidad de A es asignada a la función identidad del conjunto $\sigma(A)$.

(3) La composición de flechas en $\mathscr{A}$ se corresponde con la composición de las funciones de conjunto respectivamente.

Al conjunto subyacente de A es común encontrarlo escrito en la literatura como $|A|$, $U(A)$ o simplemente como A mismo. Adoptaremos esta convención ocasionalmente.

Ejercicio 8.1. *Pruebe que todas las categorías en* 1.2.1 *son concretas.*

Ejemplo 8.2. *Si bien la gran mayoría de ejemplos que hemos visto son de categorías concretas, existen algunos que no. El ejemplo más inmediato es, sin duda,* **CAT** *y* **Cat** *pues muchos de sus elementos pueden ser clases propias por tanto no se podría definir un funtor hacia* **Set** *(aunque justificar esto completamente necesita más trabajo).*

En general, demostrar que una categoría no es concreta es una tarea delicada. Por ejemplo, ***Toph***** tampoco es una categoría concreta; sin embargo, este resultado es demasiado técnico, el lector interesado puede encontrar su demostración en "Homotopy is not concrete" de Peter Freyd.*

Las categorías concretas son útiles porque además de ser las que están más cerca a nuestra intuición, también son el contexto de un concepto muy importante, que en siguientes lecciones vamos a generalizar.

Definición (Objeto libre)**.** *Sea A un objeto de una categoría concreta $\mathscr{A}$, sea X un conjunto no vacío y $i : X \to A$ en* Hom(**Set**)*, entonces se dice que A es **libre** en el conjunto X si:*

Para todo objeto A' de $\mathscr{A}$ y $f : X \to A'$ en Hom(***Set***) *existe una única flecha $\overline{f} : A \to A'$ en* Hom($\mathscr{A}$) *tal que $\overline{f}i = f$ en **Set**.*

Observación 22. *Para ser más explícitos, si es que U es el funtor olvidadizo $U : \mathscr{A} \to$ **Set** y se nos es dado $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ y una flecha $i : X \to U(A)$ entonces que A sea libre en X significa:*

Para todo $A' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y $f : X \to U(A')$ existe una única flecha $\overline{f} : A \to A'$ tal que $U(\overline{f})i = f$.

$$\mathbf{Set} \xleftarrow[U]{\qquad\qquad} \mathscr{A}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & U(A) \arrow[d, dotted, "U(\overline{f})"] & & A \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] \\
& U(A') & & A'
\end{tikzcd}$$

*Como mnemotécnica: en el diagrama, los elementos en azul son los elementos dados su existencia, en rojo son elementos arbitrarios en una categoría y en verde es el único elemento que debe existir para cada que se cumpla que A es libre en X. Esta clase de concepto que conecta las flechas de toda una categoría es parte de una familia de propiedades llamadas **universales** que profundizaremos después.*

La idea general es la siguiente: podemos pensar en X como un subconjunto de A y en la función i como una inclusión, el hecho de que A sea libre en X significa que, para definir una flecha con dominio A es suficiente con definir la función solamente en X.

Ejemplo 8.3. *Sea G un grupo y $g \in G$, entonces la función $\overline{f} : \mathbb{Z} \to G$, definida por $\overline{f}(n) = g^n$, es el único homomorfismo de grupo $\overline{f} : \mathbb{Z} \to G$ tal que $\overline{f}|_{\{1\}} = g$.*

De manera conversa si $X = \{1\}$ y sea $i : X \to \mathbb{Z}$ la inclusión, entonces $\mathbb{Z}$ es libre en X. En efecto, si $f : X \to G$ con $f(1) = g$, entonces definimos $\overline{f}$ como antes entonces se cumple que el diagrama de la definición conmuta. Esto significa que un homomorfismo de grupo $f : \mathbb{Z} \to G$ se define únicamente especificando su valor en $1 \in \mathbb{Z}$.

Esta propiedad parece trivial pero no lo es, de hecho solo se cumple para el grupo $\mathbb{Z}$ salvo isomorfismo como veremos. Por ejemplo, consideremos el grupo aditivo $\mathbb{Q}$, entonces no cumple que sea libre para algún conjunto X. Empecemos notando que el único homomorfismo de grupo $\overline{f} : \mathbb{Q} \to S_3$ es el trivial, algo que no pasaba antes, en efecto, para todo $x \in \mathbb{Q}$ se debería tener que

$$\underbrace{\overline{f}(x) \cdot \ldots \cdot \overline{f}(x)}_{6 \text{ veces}} = e \in S_3.$$

Esto porque S_3 tiene grado 6, pero entonces también se cumple para todo $x \in \mathbb{Q}$

$$\overline{f}(x) = \overline{f}\left(\frac{6x}{6}\right) = \underbrace{\overline{f}\left(\frac{x}{6}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{x}{6}\right)}_{6 \text{ veces}} = e.$$

Así, $\overline{f}$ solo puede ser el homomorfismo trivial (en general, lo anterior funciona para cualquier grupo H de orden finito en lugar de S_3).

*Pero esto significa entonces que si X es cualquier conjunto, $i : X \to \mathbb{Q}$ es cualquier función y si tenemos otra función $f : X \to S_3$ con $f(x) \neq 1$ para algún $x \in X$, entonces no puede haber $\overline{f} : \mathbb{Q} \to S_3$ homomorfismo de grupo, tal que $\overline{f}i = f$ en **Set**.*

Ejemplo 8.4. *En álgebra abstracta no es nada raro encontrarse con la construcción del **monoide libre** $M(S)$ y del **grupo libre** $F(S)$, a partir de un conjunto S. A continuación detallamos rápidamente como se definen estos dos objetos:*

- *Dado el conjunto S y un conjunto unitario $\{1\}$, cuyo único elemento llamaremos 1 y asumimos que no pertenece a S, entonces definimos una **palabra** sobre S como una sucesión de elementos de $S \cup \{1\}$:*
$$(x_1, x_2, x_3, \dots)$$
*para la cual existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = 1$ si y solo si $i > n$. Escribiremos $x_1x_2 \dots x_n$ para referirnos a una palabra. En el conjunto de todas las palabras, al cual nos referimos como S^* (y es conocido en el ambito de la informática como **clausura de Kleene**) se definirá una operación binaria $*$:*
$$x_1x_2 \dots x_n * y_1y_2 \dots y_m = x_1x_2 \dots x_ny_1y_2 \dots y_m.$$
*Esta operación será conocida como **concatenación**. Es fácil ver que la **palabra vacía**, definida por la sucesión $(1, 1, \dots)$ y notada por $-$ es un elemento neutro con respecto a $*$. Por tanto, S^* junto con la operación $*$ definen un monoide, el monoide libre sobre S: $M(S)$. Existe una obvia aplicación inyectiva $i : S \to M(S)$ que asigna a cada elemento $x \in S$ la palabra "x" en $M(S)$ y a la identidad $e \in S$, la palabra vacía.*

- *Sea S^{-1} otro conjunto disjunto de S de tal manera que exista una biyección de S a S^{-1}, la imagen de $s \in S$ bajo esta biyección la denotaremos por $s^{-1} \in S^{-1}$, y sea $\{1\}$ un conjunto unitario con un elemento 1 que asumimos no pertenece a S ni a S^{-1}. En este contexto, una palabra será de nuevo una sucesión de $S \cup S^{-1} \cup 1$, digamos $(x_1, x_2, \dots)$ para la cual existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = 1$ si y solo si $i > n$. Una **palabra reducida** en S será una palabra tal que $x_{i+1} \neq x_i^{-1}$ para todo $x_i \neq 1$.*

  *Intuitivamente esto significa que hemos eliminado las partes de las palabras conteniendo $x_i^{-1}x_i$, o lo que es lo mismo lo hemos reemplazado por la palabra vacía. No es difícil ver que a toda palabra se le asociar una palabra reducida que será llamada su **reducción**.*

  Por ejemplo, si tenemos una palabra $x_1x_2x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_4x_5^{-1}$, entonces su reducción será $x_1x_3x_5^{-1}$.

  Consideramos ahora el conjunto de todas las palabras reducidas, armada con la operación $*$ que además de concatenar, reduce la palabra resultante. La palabra vacía es un elemento neutro y toda palabra reducida $x_1x_2 \dots, x_n$ tiene un inverso igual a $x_n^{-1}x_{n-1}^{-1} \dots x_1$. Así este conjunto es un grupo y lo llamaremos el grupo libre de S: $F(S)$. al igual que antes existe una inclusión $i : S \to F(S)$

- *Las anteriores construcciones son en efecto objetos libres, más precisamente:*

  *Dado un conjunto S entonces $M(S)$ y $F(S)$, junto con sus inclusiones, son libres en S en las categorías **Mon** y **Grp** respectivamente*

  Demostración. Haremos solo un esbozo de la demostración para el caso del grupo libre: Dado la inclusión $i : S \to F(S)$ y además una función de conjuntos $f : S \to G$ donde G es un grupo, entonces debemos hallar un único homomorfismo de grupo $\overline{f} : F(S) \to G$

tal que $\overline{f}i = f$. Sea pues $\overline{f}$ definido en $F(S)$ como $\overline{f}(1) = e$ y para una palabra reducida $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_n^{d_n}$, donde $d_i = \pm 1$, fijamos

$$\overline{f}(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_n^{d_n}) = f(x_1)^{d_1}f(x_2)^{d_2}\ldots f(x_n)^{d_n}.$$

Esta función está bien definido en G, además no es díficil probar que esta función es un homomorfismo de grupo. Es único porque si existe otro homomorfismo $g : F(S) \to G$ tal que $gi = f$, entonces también se debe tener que

$$g(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_n^{d_n}) = g(x_1)^{d_1}g(x_2)^{d_2}\ldots g(x_n)^{d_n}$$

$$= gi(x_1)^{d_1}gi(x_2)^{d_2}\ldots gi(x_n)^{d_n} = f(x_1)^{d_1}f(x_2)^{d_2}\ldots f(x_n)^{d_n} = f(x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_n^{d_n}),$$

luego $g = f$. □

La importancia del grupo libre radica en el siguiente hecho:

Teorema 8.5. *Todo grupo es la imagen homomórfica de un grupo libre*

Demostración. Sea X el conjunto de generadores de G. Es decir sea $X \subset G$ tal que G es el grupo más pequeño que lo contiene.

Si aplicamos el hecho de que $F(X)$ es libre en X obtenemos de la función $f : X \to G$, definida por $f(x) = x$, un homomorfismo de grupo $\overline{f} : F(X) \to G$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

Más aún, por cómo se construyó $\overline{f}$ en el anterior ejemplo y del hecho de que todo X genera a G obtenemos que f es sobreyectiva. □

Este resultado está en el corazón de la manera en como escribimos o representamos un grupo. Por ejemplo, sea D_4 un grupo dihedral, visto en 6.7, que se escribe como

$$D_4 = \{r^4 = s^2 = e,\ rs = sr^{-1}\}$$

y consta de 8 elementos. Consideramos ahora, el conjunto $S = \{r, s\}$ y el grupo libre $F(S)$ de todas las palabras reducidas en las letras r, s, r^{-1}, s^{-1}. Luego se tiene que

$$\varphi(F(S)) = D_4,$$

donde φ es un homomorfismo que contiene en su núcleo a las palabras r^4, s^2 y $rs^{-1}rs$.

Hemos hablado de “el” monoide o grupo libre, la justificación se tiene porque, de existir, son únicos salvo isomorfismo.

Teorema 8.6. *Consideremos $\mathscr{A}$ una categoría concreta y A, A' dos objetos de $\mathscr{C}$ tales que son libres en los conjuntos X y X' respectivamente. Además, supongamos que estos conjuntos tienen la misma cardinalidad, entonces se cumple que $A \cong A'$ en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Notemos que como X y X' tienen la misma cardinalidad entonces existe una biyección $h : X \to X'$. Consideremos además las funciones $i : X \to A$ y $j : X' \to A'$ dadas porque A sea libre en X y A' sea libre en X', respectivamente. Sea la función $jh : X \to A'$, como A es libre en X, entonces existe un única flecha $\varphi : A \to A'$ en $\mathscr{A}$ tal que $jh = \varphi i$, es decir, el siguiente diagrama en **Set**:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] & A' \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h"] & X' \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta. De manera análoga, dado que h tiene un inverso h^{-1}, entonces existe una única flecha $\psi : A' \to A$ en $\mathscr{A}$ tal que:

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\psi"] & A \\
X' \arrow[u, "j"] \arrow[r, "h^{-1}"] & X \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Combinando ambos diagramas, de izquierda a derecha, obtenemos otro diagrama conmutativo en **Set**:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi\varphi"] & A \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h^{-1}h=1_X"] & X \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
$$

Esto significa que $(\psi\varphi)i = i1_X = i$ y también que $1_A i = i$, por lo tanto como φ y ψ son únicos, se obtiene que $\psi\varphi = 1_A$. Ahora, si combinamos los dos primeros diagramas, de derecha a izquierda, obtenemos por un argumento similar que $\psi\varphi = 1'_A$. Como ambas flechas están en $\mathscr{A}$, deducimos entonces que son inversos en esa categoría y por tanto isomorfismos, así $A \cong A'$. $\square$

Observación 23. *Hemos probado que todo objeto libre sobre un conjunto en una categoría concreta es único salvo isomorfismo, más aún, si se revisa la demostración anterior es sencillo ver que este isomorfismo es único, usando la definición de objeto libre.*

Así todo objeto libre es esencialmente único. Esto también se deriva, como veremos en poco, del hecho de que un objeto libre no es más que un objeto universal (o inicial) en una categoría distinta, pero derivada de la original.

Definición. *Dado un funtor* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *y* $X \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$ *entonces se define la categoría coma* $(X \downarrow F)$ *como la categoría que tiene como objetos a los pares de la forma* $(A, f : X \to F(A))$ *para cada* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$*, y una flecha de* $(A, f : X \to F(A))$ *hacia* $(A', f' : X \to F(A'))$ *es una flecha* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A')))$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
F(A) \arrow[rr, "g"] & & F(A')
\end{tikzcd}
$$

Lema 8.1. *$A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ con $\mathscr{A}$ categoría concreta es libre en el conjunto X si y solo si $(A, i : X \to U(A))$ es un objeto universal en la categoría $(U \downarrow X)$ con $U : \mathscr{A} \to$ **Set** el funtor olvidadizo.*

Demostración. Ejercicio. □

Regresamos ahora con más ejemplos de objetos libres

Ejemplo 8.7. *De manera similar al ejemplo 8.4 podemos ir construyendo objetos libres con estructura cada vez más compleja en base de un conjunto S. Algunos ejemplos a continuación.*

- *$P(S)$ el anillo conmutativo libre en S, que resulta ser al anillo de polinomios sobre $\mathbb{Z}$ en las variables x_s con $s \in S$ y $x_{s_1}x_{s_2} = x_{s_2}x_{s_1}$ para todo $s_1, s_2 \in S$. Por ejemplo, si S tiene tres elementos entonces $P(S) \cong \mathbb{Z}[x, y, z]$. Se puede probar que $P(S)$ es, en efecto, libre en S en la categoría **CRing**.*
- *Fijando un campo k, definimos a $V(S)$ el $k-$espacio vectorial libre en S como aquel que tiene de base a S. Resulta ser el espacio vectorial de k-combinaciones lineales formales con elementos en S, esto es expresiones*

  $$\sum_{s \in S} \alpha_s s,$$

  donde $\alpha_s \in k$ y $\alpha_s = 0$ para todo $s \in S$ excepto para un número finito de elementos. La suma y multiplicación por escalar se definen componente a componente.

  $$\sum_{s \in S} \alpha_s s + \sum_{s \in S} \beta_s s = \sum_{s \in S} (\alpha_s + \beta_s)s, \qquad c \cdot (\sum_{s \in S} \alpha_s s) = \sum_{s \in S} (c \cdot \alpha_s)s.$$

  Estas combinaciones formales se definen de forma rigurosa como todas las funciones $\alpha : S \to K$ tal que el conjunto $\{s \in S, \ \alpha(s) \neq 0\}$ es finito. La expresión como combinación formal se logra poniendo $\alpha_s = \alpha(s)$. Análogo al caso en anillos, $V(S)$ es libre en S en la categoría $\mathbf{Vect}_k$.

Lo que hemos hecho en los ejemplos 8.4 y 8.7 es realizar el primer paso para definir funtores $F : \mathbf{Set} \to \mathscr{A}$ donde $\mathscr{A}$ es una categoría concreta con elementos armados de alguna estructura algebraica: **Mon, Grp, Ring, CRing,** $\mathbf{Vect}_k$, patrón que puede seguir siendo generalizado. Dada una función de conjuntos $h : S \to S'$, la flecha $F(h) : F(S) \to F(S')$ se define como la única flecha (cuya existencia está asegurada porque $F(S)$ es libre en S) que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & U(F(S)) \arrow[d, "U(F(h))"] \\
S' \arrow[r, "i'"] & U(F(S'))
\end{tikzcd}$$

con i, i' son las inyecciones evidentes que existen de S hasta el conjunto subyacente de su objeto libre: $U(F(S))$. Por tanto, F es un funtor con la propiedad de que $F(S)$ es libre en S para todo $S \in \mathbf{Set}$, a los funtores de este tipo los llamaremos **funtores libres**, aunque este término es informal y se le aplica a otros ámbitos, en especial si entendemos por funtor olvidadizo a cualquiera que pierde parte la estructura de los objetos y flechas.

El siguiente ejemplo de un funtor "libre" es bastante ilustrativo.

Ejemplo 8.8. *Intentemos crear una* ***categoría libre*** $F(G)$ *(y por tanto un funtor F) a partir de un grafo dirigido G. Como vimos en la primera lección, para cada categoría $\mathscr{A}$ existe su grafo subyacente, al cual también llamamos el diagrama de $\mathscr{A}$ y ahora notaremos por $U(\mathscr{A})$, es claro que esto define un funtor "olvidadizo" U :* $\boldsymbol{Cat} \to \mathbf{Graph}$ *porque todo funtor $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre dos categorías define un homomorfismo de grafos $U(f)$ en sus grafos subyacentes.*

Queremos que la categoría $F(G)$ sea "libre" en G tomando en cuenta como funtor olvidadizo a U. Esto quiere decir que dado un grafo G, y una inclusión por determinar $i : G \to U(F(G))$ entonces para toda categoría $\mathscr{A}$ y funtor $f : F(G) \to A$ entonces existe una único funtor $\overline{f} : F(G) \to A$ tal que $U(\overline{f})i = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Graph} & & \boldsymbol{Cat} \arrow[ll, "U"'] \\
G \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & U(F(G)) \arrow[d, dotted, "U(\overline{f})"] & & F(G) \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] \\
 & U(\mathscr{A}) & & \mathscr{A}
\end{tikzcd}$$

(Comparar esto con la definición de objeto libre). Para lograr la construcción de $F(G)$ se procede de la siguiente manera.

Para un grafo dirigido G existen dos conjuntos: El conjunto de vértices V y el conjunto de aristas E. Como es un grafo dirigido, cada arista $a \in E$ tiene una vértice de entrada y uno de salida, esto define dos funciones $e : E \to V$, $s : E \to V$. Así, si

$$v_1 \xrightarrow{a} v_2$$

es una arista, entonces $e(a) = v_1$ y $s(a) = v_2$. Ahora, la categoría $F(G)$ tiene objetos a los vértices de V y como flechas a los caminos de G, esto es sucesiones $a_m a_{m-1} \dots a_1$ de aristas de la forma

$$v_1 \xrightarrow{a_1} v_2 \xrightarrow{a_2} v_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} v_n$$

y fijamos $\operatorname{dom}(a_n \dots a_1) = e(a_1)$ y $\operatorname{cod}(a_n \dots a_1) = s(a_n)$. De forma análoga a cuando definimos el grupo libre, la composición de dos caminos $a_n \dots a_1$ y $a'_m \dots a'_1$ es su concatenación

$$a_n \dots a_1 a'_m \dots a'_1.$$

Para cada vértice v tenemos un camino vacío, al que denotaremos como la flecha identidad en v. De esta manera la construcción está completa.

Observemos que un funtor libre F genera, a partir de S, una estructura algebraica $F(S)$ con lo mínimo necesario, al contrario de los funtores olvidadizos que en general buscan eliminar una estructura existente. Podríamos pensar que talvez son funtores inversos, o que representan conceptos duales pero el término correcto es que son **funtores adjuntos**, tema importante de la última lección.

La siguiente sección es opcional y el lector puede saltarla ya que no tendrá repercusión en las siguientes lecciones. Por completitud se muestra aquí como podemos incluir, usando las herramientas de esta lección, a las variadas categorías que hacían uso de la idea de homotopía, en una estructura más general.

Categoría de Homotopía

Un par topológico (X, A) consiste de un espacio topológico X y de un subespacio $A \subseteq X$. Notamos $(X, \emptyset)$ por X.

Entenderemos por un subpar de (X, A) como otro par (X', A') tal que $X' \subseteq X$ y $A' \subseteq A$. Escribimos esto como

$$(X', A') \subseteq (X, A).$$

Para crear una categoría de pares topológicos, necesitamos definir las flechas correspondientes. Una flecha $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una función continua de $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Es claro que esta categoría, tiene como categorías plenas a las imágenes de **Top** y **Top***, a través de la incrustación plena definida en los objetos por $F(X) = (X, \emptyset)$.

Sea el par $(X, A) \times I := (X \times I, A \times I)$ y supongamos que tenemos un subespacio $X' \subseteq X$, entonces diremos que dos flechas

$$f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B),$$

que asumimos son iguales en X' (es decir $f_0|_{X'} = f_1|_{X'}$), son **homotópicamente equivalentes** si es que existe una flecha

$$F : (X, A) \times I \to (Y, B),$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$ y además $F(x, t) = f_0(x)$ para todo $x \in X'$ y $t \in I$.

Siendo así, diremos que F es una homotopía relativa a X' (o que deja fijo a X') y, además escribiremos $f_0 \sim f_1$ rel X' y también si queremos ser más sucintos podemos escribir $F : f_0 \sim f_1$ sim X' para denotar que la función F es la homotopia relativa a X' que relaciona a f_0 y f_1.

Si $X' = \emptyset$ escribiremos simplemente $f_0 \sim f_1$. Es claro que la homotopía de lazo definida en la lección 1 es el caso particular cuando consideramos solo los pares (I, A) con A, conjunto de cardinalidad 1. Diremos que $f_0 : X \to Y$ es nulamente homotópico si $f \sim c$ donde c es una función constante.

Ejemplo 8.9.

- *Sea $X = Y = \mathbb{R}^n$ y $f_0(x) = x$ entonces f es nulamente homotópico porque $f_0 \sim f_1$ rel 0 donde $f_1(x) = 0$ y hemos usado la homotopía:*

  $$F(x, t) = (1 - t)x.$$

- *Sea $X = Y = \mathbb{B}^2$ donde $\mathbb{B}^2$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$ y sea la flecha*

  $$f_0 : (\mathbb{B}^2, \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{B}^2, \mathbb{S}^1),$$

  definida con la función identidad y

  $$f_1 : (\mathbb{B}^2, \mathbb{S}^1) \to (\mathbb{B}^2, \mathbb{S}^1),$$

  con $f_1(x) = -x$. Entonces $f_0 \sim f_1$ rel 0, para ello notemos que cada $x \in \mathbb{B}^2$ lo podemos escribir como $x = re^{i\theta}$ con $r \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces la homotopía requerida F se define por la fórmula

  $$F(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta + \pi)}.$$

- *Sea X un espacio topológico y Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Sean f, g cualesquier par de funciones continuas $X \to Y$ que coincidan en algún subespacio $X' \subseteq X$, entonces se tiene que $f \sim g$ rel X', porque podemos definir la homotopía relativa a X' como*

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

De manera análoga a como se expuso que la homotopía de lazo es una relación de equivalencia, también tenemos que:

Lema 8.2. *La homotopía relativa a X' es una relación de equivalencia en hom-set de todas las flechas $(X, A) \to (Y, B)$.*

Siendo así podemos para cada flecha $f : (X, A) \to (Y, B)$ designar su clase de equivalencia como $[f]_{X'}$ y al conjunto de sus clases de equivalencia como

$$[X, A; Y, B]_{X'}.$$

Quisiéramos comprobar, de igual manera, que está bien definida la operación:

$$[f] \circ [g] = [f \circ g],$$

cada vez que f y g se puedan componer. Para ello la demostración tiene algunas modificaciones.

Lema 8.3. *Si $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ tales que $f_0 \sim f_1$ rel X', y $g_0, g_1 : (Y, B) \to (Z, C)$ tales que $g_0 \sim g_1$ rel Y' y $f_1(X') \subseteq Y'$ entonces se cumple que*

$$g_0 f_0 \sim g_1 f_1 \text{ rel } X'.$$

Demostración. Sean las homotopías relativas $F : f_0 \sim f_1$ rel X' y $G : g_0 \sim g_1$ rel Y'. Consideremos la composición

$$g_0 F : (X, A) \times I \longrightarrow (Z, C),$$

la cual es una función continua, más aún es una homotopía relativa a X' de $g_0 f_0$ hacia $g_0 f_1$. Es decir es cierto que $g_0 f_0 \sim g_0 f_1$ rel X'.

Ahora consideremos la composición

$$G(f_1 \times 1_I) : (X, A) \times I \longrightarrow (Z, C),$$

la cual es también una homotopía pero que deja fija a un elemento (x, t) si y solo si $f_1(x) \in Y'$, es decir es una homotopía relativa a $f_1^{-1}(Y')$ de $g_0 f_1$ hacia $g_1 f_1$. Como $X' \subseteq f_1^{-1}(Y')$ entonces también tenemos por lo anterior que $g_0 f_1 \sim g_1 f_1$ rel X', pero como se dijo la relación $\sim$ rel X' es una relación de equivalencia, por lo tanto por transitividad se consigue que

$$g_0 f_0 \sim g_1 f_1 \text{ rel } X',$$

como queríamos. $\square$

Los resultados anteriores muestran que existe una **categoría de homotopía**, la cual notaremos por **Htop** que tiene como objetos a los pares topológicos y que tiene como flechas a las clases de homotopías entre dos pares topológicos, relativos a $\varnothing$. Tiene como subcategorías plenas a las imágenes de las categorías **Toph** y **Toph*** a través de incrustaciones plenas adecuadas, definidas en pares topológicos (I, A) con $A = \varnothing$ y A cualquier conjunto unitario, respectivamente.

Ejercicio Resuelto 3

Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor, se define

$$\mathrm{Im}(F) = \{F(C) : C \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})\} \cup \{F(f) : f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{C})\}$$

Muestre que $\mathrm{Im}(F)$ no es una categoría a menos que F sea inyectiva en objetos.

Demostración. Consideremos las siguientes categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ respectivamente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, "n"] & \\ y \arrow[r, "m"'] & z \end{tikzcd}$$

y definimos $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ en los objetos como $F(A) = x$, $F(B) = F(C) = y$, $F(D) = z$ y para las flechas como $F(f) = l$, $F(g) = m$. Es fácil ver que es un funtor, pero también que $\mathrm{Im}(F)$ es el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "l"'] & \\ y \arrow[r, "m"'] & z \end{tikzcd}$$

que no es una categoría.

Ahora supongamos que tenemos un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ arbitrario entre dos categorías, que es inyectivo en objetos. Vemos que $\mathrm{Im}(F)$ es una subcategoría de $\mathscr{D}$, donde tiene como objetos a todos los elementos $F(c)$ con $c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$ y como flechas a $F(f)$ con $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{C})$; la composición $F(f)F(g) = F(fg)$ está bien definida entre dos flechas $F(g) : F(A) \to F(B)$. Luego, al ser inyectivo en objetos se tiene que $B = C$, por tanto $g : A \to B$ y $f : B \to D$, de donde la flecha fg existe. $\square$